Corrigé du devoir maison : le second degré

Seconde 11

1 Partie commune à tous

A) Résoudre les équations suivantes

1. $3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3}$. L'équation a donc deux solutions : $\mathcal{S} = \{\sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\}$
2. $x(2x+1) = 0$. C'est une équation au produit nul, elle admet deux solutions, que l'on trouve en résolvant $2x+1=0$ et $x=0$: $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{2}; 0\}$
3. $x^2 + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = -4$. Cette équation n'admet aucune solution $\mathcal{S} = \emptyset$.
4. $(x-2)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 5$. On en déduit que $(x-2) = \sqrt{5}$ ou $x - 2 = -\sqrt{5}$. On en déduit que l'équation a deux solutions : $\mathcal{S} = \{2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}\}$

B) Forme canonique, développée, factorisée

On considère la forme factorisée suivante

$$f(x) = (3x+1)(-2x+2).$$

1. On développe et on trouve $-6x^2 + 4x + 2$ donc $a = -6, b = 4, c = 2$.
2. On calcule $a = -6, \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}, \beta = f(\alpha) = f(\frac{1}{3}) = 2 \times (-\frac{4}{3}) = \frac{-8}{3}$. Donc
$$f(x) = -6(x - \frac{1}{3}) + \frac{8}{3}.$$
3. Justifier quelle vous semble la meilleure forme pour répondre aux questions suivantes et ensuite y répondre :
   (a) Avec la forme factorisée, on résout une équation produit nul, on trouve $x = \frac{-1}{3}$ ou $x = 1$.
   (b) On utilise la forme canonique et on trouve $\frac{8}{3}$.
   (c) Pour cela on peut utiliser soit la forme développée soit la forme canonique et on trouve que le maximum vaut $\beta = \frac{8}{3}$ et que ce maximum est atteint en $\alpha = \frac{1}{3}$.

2 Pour les élèves n'envisageant pas de filière scientifique

Le propriétaire d'un cinéma vend 300 billets à 7 euros par séance. Il a constaté qu'il diminue le prix de 0,1 euro, il vend 10 billets supplémentaires. Il décide d'engager une campagne de promotion.

1. Le propriétaire décide alors de faire x réductions de 0,1 euro. On rappelle que la recette est le produit entre le nombre de billets q et le prix d'un billet.
2. En fonction de x, le prix d'un billet est de $p(x) = 7 - 0,1x$.
3. De la même façon, d'après le texte comme le propriétaire vend 10 billets de plus chaque fois qu'il baisse son prix de 0,1 euro, la quantité vendue en fonction de x est $q(x) = 300 + 10x$. On a après $r(x) = \big(p(x)\big) \times \big(q(x)\big) = (7 - 0,1x)(300 + 10x) = -x^2 + 40x + 2100$.

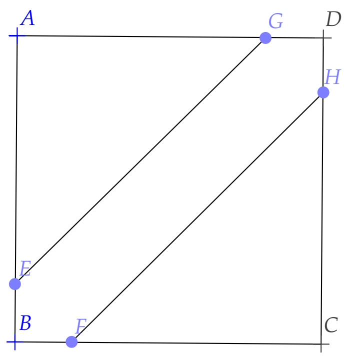
4. On applique la formule du cours, a étant négatif, la fonction admet un maximum et est atteint pour $x = \frac{-b}{2a} = 20$ et il vaut $f(\frac{-b}{2a})$.

x	$-\infty$	20	$+\infty$
f	$\nearrow$	2500	$\searrow$

5. La recette maximale vaut 2500 euros et est donc obtenue pour 20 diminutions de $0,1$ euro, soit un prix du billet de 5 euros.

3 Pour les élèves envisageant une filière scientifique

Un géomètre est chargé de découper un terrain carré de 1 hectare en trois parcelles comme indiqué sur la figure ci-dessous. La partie centrale (l'intérieur du polygone BEGDHF) doit faire $0,75$ hectares. Les longueur BE, BF, DG, DH sont égales.



Comment doit il choisir la longueur BE ?
Soit x la longueur BE.
Rappel : Un hectare vaut $10000m^2$ et donc $AB = BC = CD = CA = 100m$.
Dans la suite on note $\mathcal{A}(ABC)$ l'aire du polygone ABC.
— L'aire de la flèche $DGEBFH$ est donnée par $\mathcal{A}(DGEBFH) = \mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(AEG) - \mathcal{A}(HCF)$.
— Calculons l'aire de $ABCD$, elle vaut $100^2 = 10000$.
— Calculons l'aire de AEG qui est aussi celle de HCF, elle vaut $\frac{(100-x)^2}{2}$.
— Ainsi, en fonction de x, $\mathcal{A}(DGEBFH) = 10000 - \frac{(100-x)^2}{2}$.
Le problème que l'on veut résoudre revient dont à trouver x tel que

$$7500 = 10000 - 2 \times \frac{(100-x)^2}{.}$$

Ce problème équivaut à résoudre l'équation :

$$(100-x)^2 = 2500.$$

Ainsi $(100-x) = \sqrt{2500}$ ou $(100-x) = -\sqrt{2500}$ donc $x = 100 - \sqrt{2500}$ ou $x = 100 + \sqrt{2500}$. La deuxième solution est impossible (plus grande que le côté du carré. On trouve donc $x = 100 - \sqrt{2500} = 100 - 50 = 50m$.