Nom :

Devoir surveillé : les droites

1 Fondamentaux du chapitre (8 points)

1.1 Lecture graphique

— (a) $x = 4$.
— (b) $y = -2$.
— (c) $y = \frac{1}{4}x + 1$.
— (d) $y = -2x - 2$.

1.2 Condition d'appartenance

On se donne trois points $A(2;1)$, $B(-1;2)$, $C(2;4)$. Sans justifier, dire si les points appartiennent aux droites suivantes.

1. $d_1 : y = 2x$. A : non, B : non, C : oui.
2. $d_2 : y = x - 1$. A : oui, B : non, C : non.
3. $d_3 : x = 2$.. A : oui, B : non, C : oui.
4. $d_4 : y = 2$. A : non, B : oui, C : non.

1.3 Equations de droites

Déterminer l'équation de :

1. d_1 :Les deux points n'ont pas la même abscisse, donc la droite est une droite oblique d'équation $y = mx + p$, calculons $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{4-2} = 2$. On écrit ensuite que $A \in d_1$ donc $1 = 2 \times 2 + p$ donc $p = -3$. Ainsi, $d_1 : y = 2x - 3$.
2. C et D ont la même abscisse, dont ils appartiennent à une même droite verticale d'équation $x = 3$,
3. Un raisonnement similaire que pour d_1 conduit à trouver une équation $d_3 : y = \frac{3}{2}x + 9$.

1.4 Intersections de droites

1. Le point d'intersection $A(x;y)$ est donc tel que

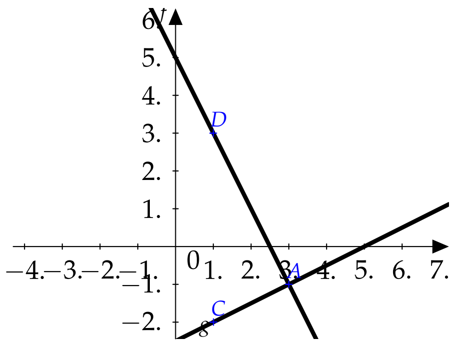
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} .$$

2. Le point d'intersection $A(x;y)$ est donc tel que
$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 6x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 14 = -x + 4 \\ y = 6x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -10 \\ y = 6x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{7} \\ y = 6x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-10}{7} \\ y = \frac{-60}{7} + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-10}{7} \\ y = \frac{31}{7} \end{cases} .$

2 Droites perpendiculaires (6 points)

Dans un repère orthonormé, on considère deux droites : d d'équation $y = -2x + 5$ et d' d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

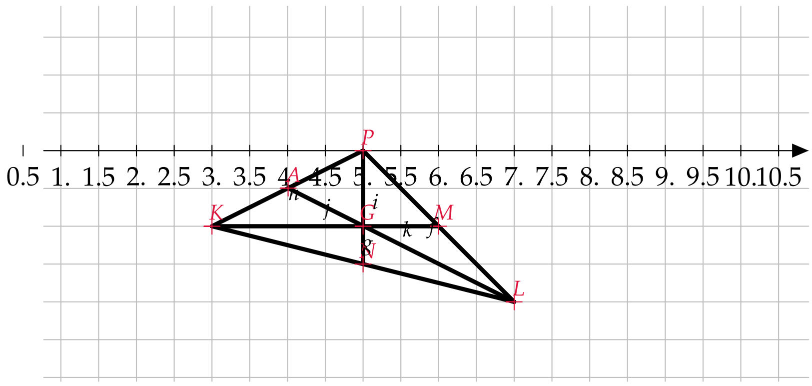
1. Ces deux droites sont obliques et n'ont pas le même coefficient directeur. Elles sont donc sécantes.
2. Résolvons le système
$\begin{cases} \text{y = -2x+5,} \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{x= 3} \\ y = -1 \end{cases}$

3. On considère les points $A(3;-1)$ et $C(1;-2)$. Montrer que A appartient à d et que C appartient à d'. Remarquons que le point A est déjà sur les deux droites puisqu'il s'agit du point d'intersection des deux droites.Pour C la vérification de l'appartenance est immédiate.
4. 
5. Pour cela on va introduire un nouveau point : $D(1;3)$. Une vérification immédiate montre que ce point appartient à d. On veut montrer que d et d' sont perpendiculaires. Cela revient à montrer que le triangle ACD est rectangle en A. Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore. On a :
   — $AC^2 = 5$
   — $AD^2 = 20$
   — $CD^2 = 25$
   On a donc $CD^2 = AC^2 + AD^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ACD est rectangle en A. L'angle en A est donc droit, donc les droites sont perpendiculaires.

3 Une histoire de médianes (6 points)

On rappelle que dans un triangle, la médiane est la droite issue d'un sommet qui coupe le côté opposé en son milieu. On rappelle que le **centre de gravité** d'un triangle est le point de concours (=intersection) des trois médianes.

Dans un repère orthonormé, on considère les points $K(3;-1)$, $P(5;0)$ et $L(7;-2)$.

1. 
2. On appelle M le milieu de $[PL]$. On a $x_M = \frac{x_P+x_L}{2} = \frac{12}{2} = 6, y_M = \frac{y_P+y_L}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.
   La médiane issue de K est donc la droite (KM). Comme K et M n'ont pas la même abscisse, cette droite n'est pas verticale et a une équation de la forme $y = mx + p$. On la détermine comme dans le premier exercice et on trouve $y = -1$.
3. Soit N le milieu de $[KL]$. On calcule ses coordonnées et on trouve $N(5; \frac{-3}{2})$. La médiane issue de P est la droite (PN). P et N ont la même abscisse et sont distincts, donc la droite est verticale et son équation est $x = 5$.
   Le centre de gravité G est le point de concours des médianes et est donc le point d'intersection de (KM) et (PN). $G(x;y)$ vérifie donc $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$. Ainsi $G(5;-1)$
4. Les trois médianes étant concourantes, on peut donc dire que la troisième médiane est la droite (LG). On détermine son équation et on trouve $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$.