Correction exercice 35 p 324

Seconde 11

1. Calculons la longueur AB. On se place dans le triangle rectangle OAB isocèle rectangle en O. On y applique le théorème de Pythagore
$$AB^2 = OA^2 + OB^2,$$
or $OA = OB = a$ donc
$$AB^2 = 2a^2,$$
Donc $AB = \sqrt{2}a$. De la même manière on démontre que $AC = BC = a\sqrt{2}$.
2. Soit V le volume du tétraèdre, $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{\frac{1}{2} \times OB \times OC \times OA}{3} = \frac{a^3}{6}$.
3. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHC. On a $OC^2 = 2a^2, HC = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ dont $HC^2 = \frac{a^2}{2}$. Donc on en déduit :
$OH^2 = a^2 - a^2/2 = \frac{1}{2}a^2$. Donc $OH = \sqrt{\frac{1}{2}}a$.
Dans le triangle, OHA, on applique le théorème de Pythagore et on trouve $AH = \sqrt{OH^2 + OA^2} = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{6}{4}a^2} = a\sqrt{6}/2$.
4. On calcule l'aire du triangle ABC :
$\mathcal{A} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}a\sqrt{6}/2}{2} = \frac{a^2\sqrt{12}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
5. On sait que le volume d'un tétraèdre est donné par le tiers du produit entre l'aire de la base et la hauteur. Si h est la longueur de la hauteur issue de O, $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre $OABC$ et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC, on a $h \times \mathcal{A} \times \frac{1}{3} = \mathcal{V}$ donc
$$h = 3\frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}}.$$
En remplaçant par les résultats des questions 2 et 4 on trouve
$$h = 3\frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$