# Chapitre 10 : Géométrie dans l'espace

Seconde 11

## 1 Représentation de l'espace : perspective cavalière

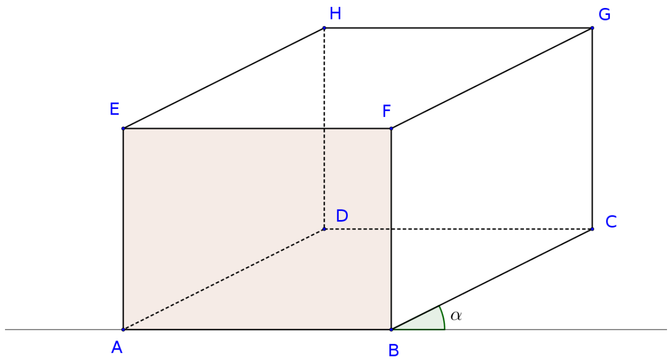



FIGURE 1 – Dans cette figure ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (aussi appelé pavé droit). Chacune de ses faces est un rectangle.

**Théorème 1** *(Règles de la perspective cavalière) :*

1. *Les lignes cachées sont représentées en                    . Les lignes visibles sont en                                .*
2. *Le plan de face (ou plan frontal) et les plans qui lui sont parallèles sont toujours représentés en vraie grandeur.*
3. *Dans les autres plans, les distances sont modifiées et les droites perpendiculaires au plan de face sont obliques et font un angle (appelé angle de fuite) avec l'horizontale.*

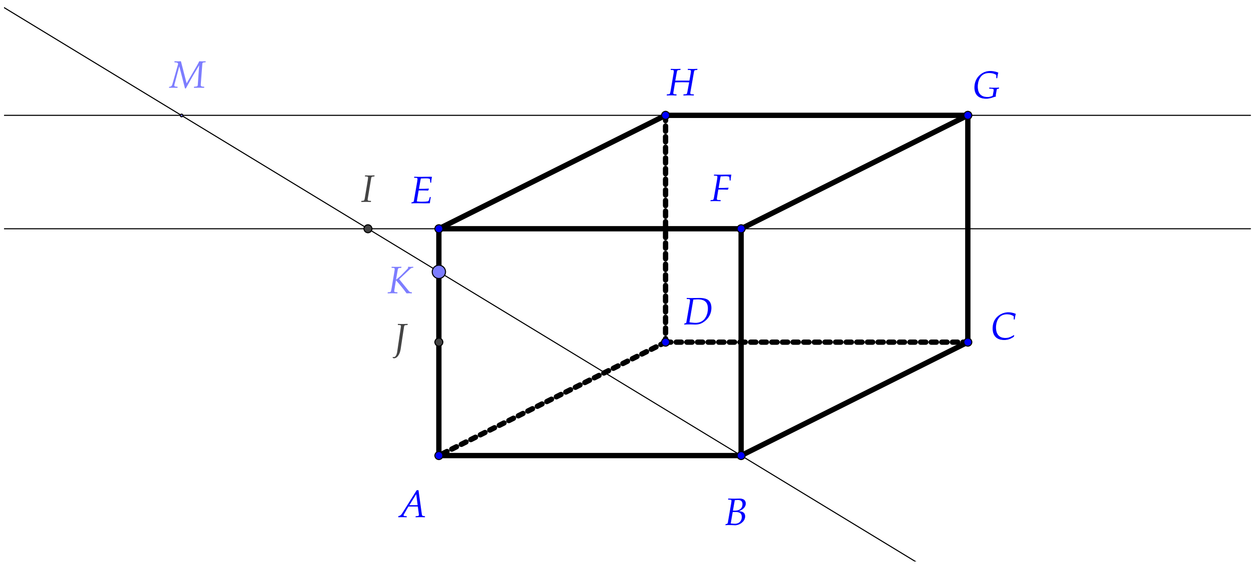
**Proposition 1** *Trois points alignés dans l'espace sont représentés par trois points alignés en perspective cavalière. Deux droites parallèles dans l'espace sont représentés par deux droites parallèles en perspective cavalière.*

**Remarque :** On dit alors que l'alignement et le parallélisme sont **conservés** en perspective cavalière.

**Exemple :** Dans l'espace $(EH)$ et $(FG)$ sont parallèles (arrêtes opposées du rectangle EFGH dans l'espace), et elles le sont aussi dans la représentation en perspective cavalière.

**Proposition 2** *Si deux droites sont sécantes dans l'espace, alors elles sont sécantes en perspective cavalière.*
***ATTENTION :*** *deux droites sécantes en perspective cavalière ne le sont pas forcément dans l'espace !*

**Exemple :** Dans la représentation en perspective cavalière ci-dessous, $(KB)$ et $(GH)$ sont sécantes. Cependant, dans l'espace ces deux droites ne se coupent pas car elles sont dans des plans correspondant à des faces opposées du parallélépipède rectangle.




# Représentation de l'espace : perspective cavalière (version enseignant)

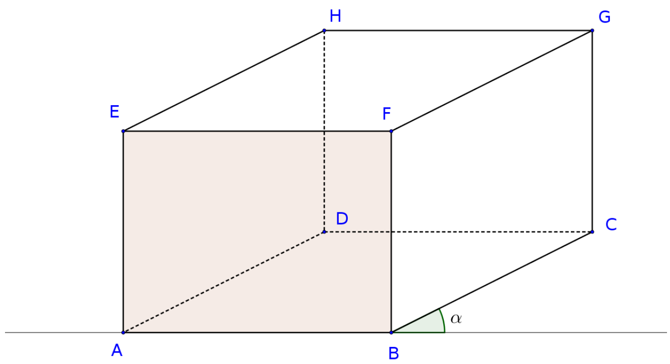



FIGURE 2 – Dans cette figure ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle (aussi appelé pavé droit). Chacune de ses faces est un rectangle.

**Théorème 2** *(Règles de la perspective cavalière) :*

1. *Les lignes cachées sont représentées en pointillés. Les lignes visibles sont en traits pleins.*
2. *Le plan de face (ou plan frontal) et les plans qui lui sont parallèles sont toujours représentés en vraie grandeur.*

3. *Dans les autres plans, les distances sont modifiées et les droites perpendiculaires au plan de face sont obliques et font un angle (appelé angle de fuite) avec l'horizontale.*

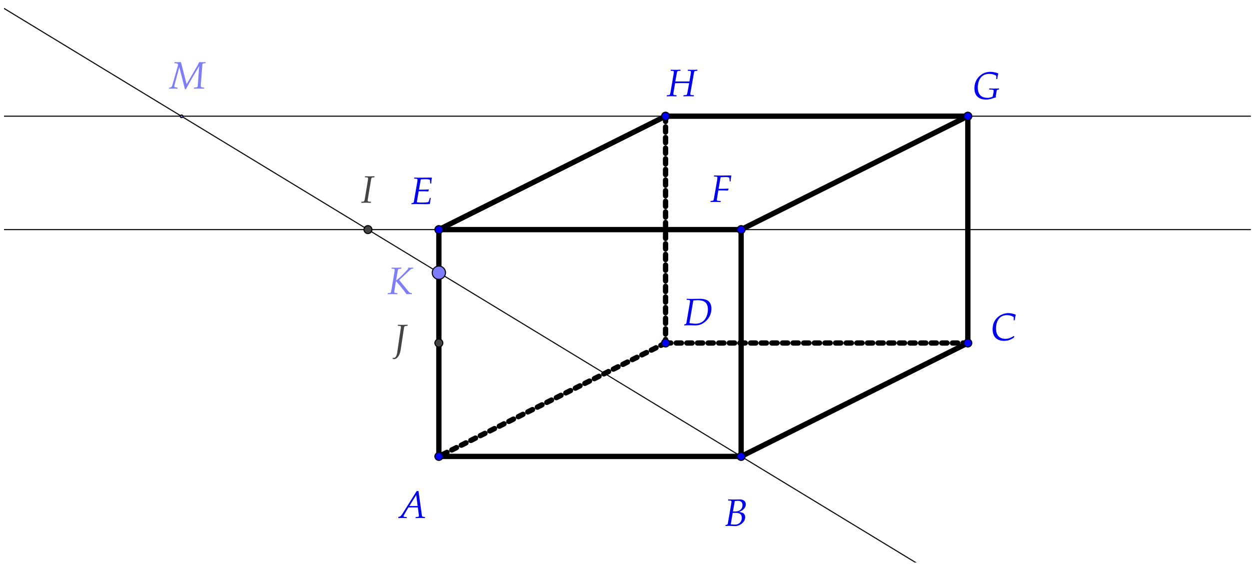
**Proposition 3** *Trois points alignés dans l'espace sont représentés par trois points alignés en perspective cavalière. Deux droites parallèles dans l'espace sont représentés par deux droites parallèles en perspective cavalière.*

**Remarque :** On dit alors que l'alignement et le parallélisme sont **conservés** en perspective cavalière.

**Exemple :** Dans l'espace $(EH)$ et $(FG)$ sont parallèles (arrêtes opposées du rectangle EFGH dans l'espace), et elles le sont aussi dans la représentation en perspective cavalière.

**Proposition 4** *Si deux droites sont sécantes dans l'espace, alors elles sont sécantes en perspective cavalière.*
***ATTENTION :*** *deux droites sécantes en perspective cavalière ne le sont pas forcément dans l'espace !*

**Exemple :** Dans la représentation en perspective cavalière ci-dessous, $(KB)$ et $(GH)$ sont sécantes. Cependant, dans l'espace ces deux droites ne se coupent pas car elles sont dans des plans correspondant à des faces opposées du parallélépipède rectangle.




# 2 Droites et plans de l'espace

## 2.1 Plans de l'espace

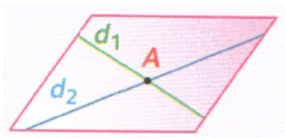
**Rappel :** Par deux points de l'espace, passe une unique droite.

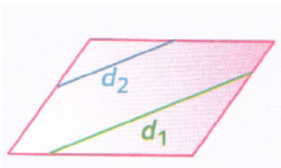
**Proposition 5** *Par trois points de l'espace non alignés passe un unique plan. On dit aussi que trois points non alignés "définissent" un plan.*

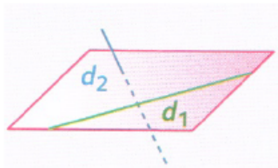
**Définition 1** *Quatre points de l'espace appartenant à un même plan sont dits coplanaires.*

**Théorème 3** *Si deux points $A$ et $B$ appartiennent au plan $\mathcal{P}$ alors la droite $(AB)$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.*

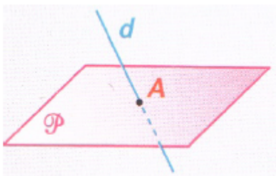
## 2.2 Position relative de deux droites

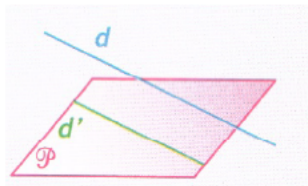
<table>
<tr><td colspan="3">Deux droites distinctes $d_1$ et $d_2$ sont :</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

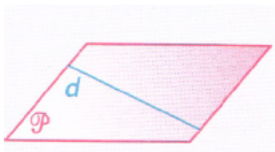
un point commun unique</td><td>

pas de point commun</td><td>

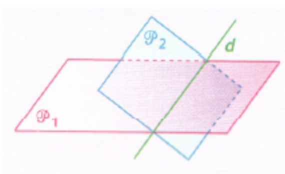
il n'existe pas de plan contenant les deux droites</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Une droite $d$ et un plan $\mathcal{P}$ et sont :</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>

$d$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point commun</td><td>

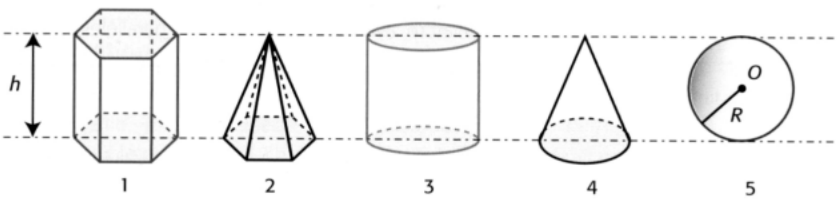
$d$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun</td><td>

$d$ est incluse dans $\mathcal{P}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Deux plans distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

leur intersection est la droite $d$</td><td>
leur intersection est vide</td></tr>
</table>

# 3 Les solides usuels




1. Le volume d'un prisme droit dont l'aire de la base est $\mathcal{B}$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$$
.
2. Le volume d'une pyramide dont l'aire de la base est $\mathcal{B}$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h.$$
3. Le volume d'un cylindre dont l'aire de la base est $\mathcal{B}$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h = \pi r^2 h.$$
4. Le volume d'un cône dont l'aire de la base est $\mathcal{B} = \pi r^2$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \pi r^2 h.$$
5. Le volume d'une sphère de rayon $r$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

# 4 Questions de parallélisme dans l'espace

## 4.1 Parallélisme de deux droites

**Proposition 6** *Dans l'espace, si deux droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles à une même troisième $d_3$ alors $d_1$ et $d_2$ sont parallèles.*

**Théorème 4** *(Théorème du toit) Soit deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sécants selon une droite $\Delta$. Si $d$ est une droite de $\mathcal{P}$ et $d'$ une droite de $\mathcal{Q}$ telle que $d//d'$ alors $d//\Delta$ et $d'//\Delta$.*

## 4.2 Parallélisme de deux plans

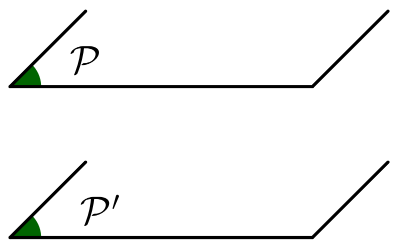
**Proposition 7** *Dans l'espace, soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans. Soit $d_1$ et $d_2$ sont deux droites de $\mathcal{P}$ qui sont sécantes.*

*S'il existe deux droites $d_3$ et $d_4$ de $\mathcal{P}'$ telles que*

— *$d_1$ est parallèle à $d_3$,*

— *$d_2$ est parallèle à $d_4$,*

*Alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.*




## 4.3 parallélisme d'une droite et d'un plan

**Proposition 8** *Si deux droites $d_1$ et $d_2$ sont parallèles alors $d_1$ est parallèle à tout plan qui contient $d_2$.*