1 Translations

Intuition : Une translation est un *glissement* avec :
— une direction,
— un sens,
— une longueur (on parle alors de *norme*.

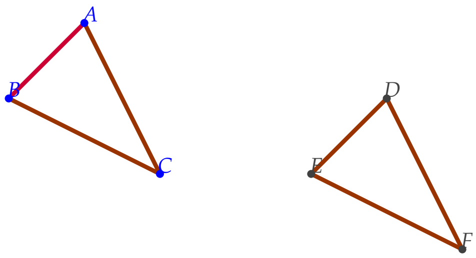


FIGURE 1 – Dans cet exemple, le triangle DEF est l'image de ABC par la translation qui transforme A en D.

Définition 1 *Soit A, B deux points du plan, on appelle **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$ la transformation du plan qui envoie un point C quelconque sur un point D obtenu en faisant glisser D*

1. *dans la direction de la droite (AB),*
2. *dans le sens de A vers B,*
3. *d'une longueur égale à la longueur AB.*

Théorème 1 *(règle du parallélogramme) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme éventuellement aplati.*

Remarque : Attention à l'ordre des lettres dans ce théorème !

2 Vecteurs

2.1 Notion de vecteur

Définition 2 *Soit t la translation qui transforme A en D, B en E et C en F (voir figure plus haut). Les couples de points $(A;D)$, $(B;E)$ et $(C;F)$ définissent un même* ***vecteur*** *caractérisé par*

1. *une direction, celle de la droite (AD) qui est aussi parallèle à celle de ,*
2. *un sens, celui de A vers D qui est aussi celui de vers ou de vers ,*
3. *une longueur : $AD =$.*

On note ce vecteur $\vec{u}$.

Remarques :

1. Un vecteur n'a pas de "place" dans le plan. On peut le faire partir de n'importe où.
2. Lorsque l'on donne un vecteur par deux lettres, par exemple $\overrightarrow{AD}$, A s'appelle l'origine du vecteur et D l'extrémité.

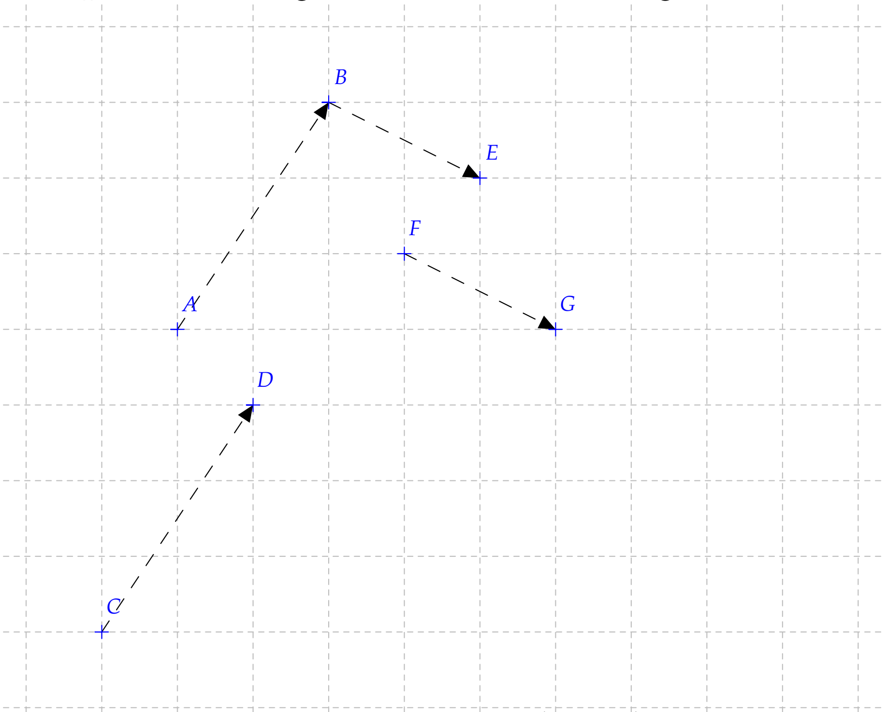
2.2 Vecteurs égaux

Définition 3 *Deux vecteurs sont égaux s'ils ont le même sens, la même direction et la même longueur.*

Remarque : De manière équivalente, deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si la translation qui transforme A en B transforme C en D.

Théorème 2 *(règle du parallélogramme version 2) Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.*

Exemple : Dans la figure ci-dessous, on a les égalités : .



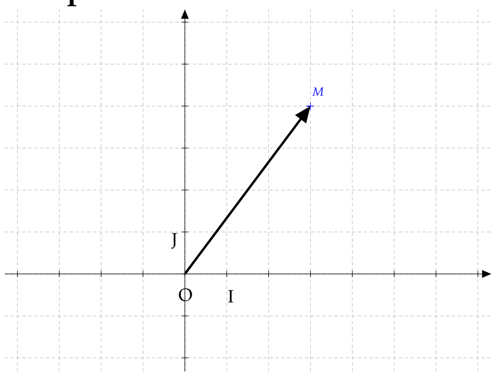
Remarque : Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, on dit qu'ils sont les **représentants** d'un même vecteur. Dans la figure ci-dessus, le vecteur $\vec{u}$ est un représentant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

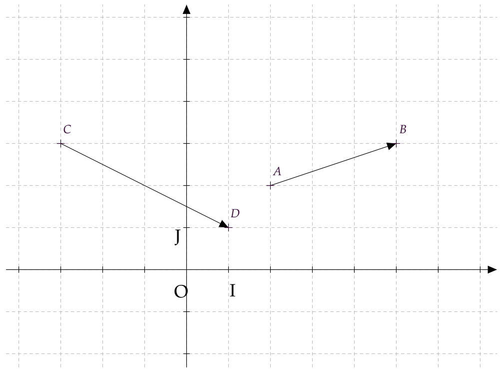
3 Coordonnées d'un vecteur

On considère un repère du plan $(O; I, J)$.

Définition 4 *Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On considère la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et on appelle M l'image de l'origine O par cette translation.Les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M. On a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.*

Exemples :





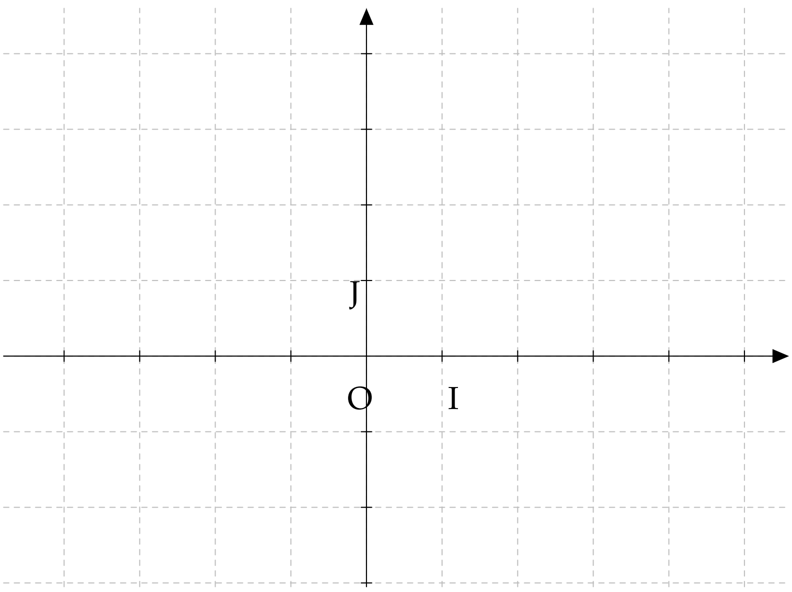
Proposition 1 *Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans un vecteur $(O; I, J)$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.*

Proposition 2 *Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux* ***si, et seulement si*** *ils ont les mêmes coordonnées.*

Exemple :

Dans le repère orthogonal ci-dessous, placer les points $A(-2; 3), B(4; -1), C(-3; 1)$. Calculer les coordonnées

1. du vecteur $\overrightarrow{AB}$,
2. du point D tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

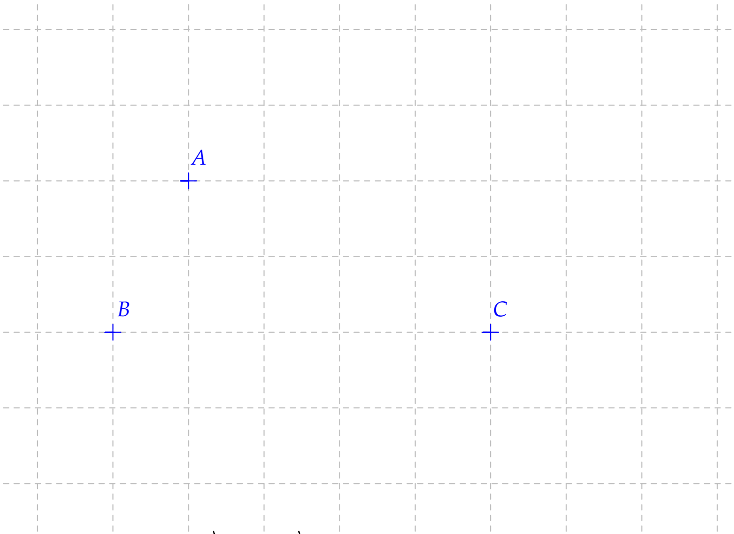


4 Opérations sur les vecteurs

4.1 Somme de vecteurs

Proposition 3 *L'enchaînement de deux translations de vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *est une translation. Le vecteur de cette nouvelle translation est appelée* *des deux vecteurs et est notée* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Proposition 4 *(Relation de Chasles) Soit* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$*, deux vecteurs, alors* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$.

4.2 Vecteur opposé, vecteur nul

Définition 5 *On appelle vecteur nul et on note* $\overrightarrow{0}$ *le vecteur de coordonnées* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Il correspond à la translation qui laisse le plan identique à lui même.*

Définition 6 *Le vecteur associé à la translation qui transforme B en A est appelé vecteur* ***opposé*** *au vecteur* $\overrightarrow{AB}$*. On note alors* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

4.3 Lien avec les coordonnées

Proposition 5 *Soit* $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *alors* $-\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Proposition 6 *Soit* $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$*, alors* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$.

5 Produit d'un vecteur par un réel, colinéarité

5.1 Produit d'un vecteur par un réel

Soit λ un nombre réel et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Définition 7 *On appelle produit de $\overrightarrow{u}$ par le réel λ le vecteur $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$. On note ce vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.*

5.2 Colinéarité

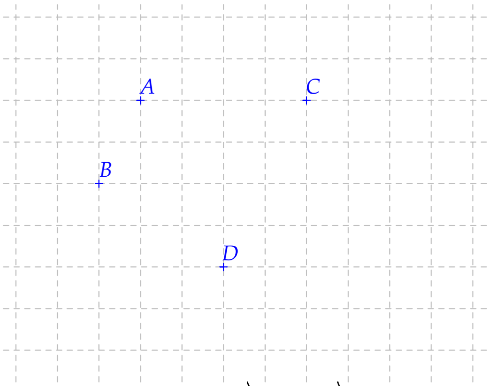
Définition 8 *Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$.*

Remarque : Le vecteur est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Proposition 7 *Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont .*

5.3 Application au parallélisme et à l'alignement

Proposition 8 *Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan, alors (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*



Remarque : Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors $ABDC$ est un .

Proposition 9 *Soit A, B, C trois points du plan, alors ils sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.*