Chapitre 7 : droites du plan

Seconde 11

1 Équations des droites du plan

Donner une équation d'un ensemble de points dans le plan, c'est donner une relation entre les abscisses x et les ordonnées y des points de cet ensemble.

Par exemple, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme . On dit alors qu'une équation de la courbe représentative de la fonction est $y = f(x)$.

1.1 Les droites représentatives de fonctions affines

Proposition 1 *Soit m, p deux nombres réels, la droite $\mathcal{D}$ est la représentation graphique d'une fonction affine $f(x) = mx + p$, alors elle admet pour équation .*

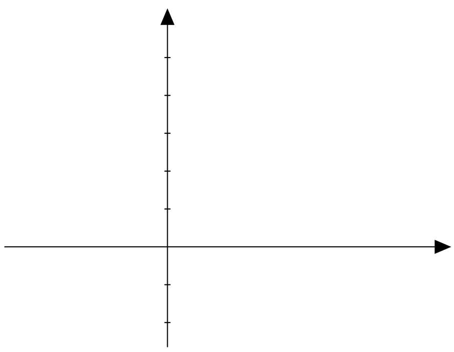
Remarque : si la droite $\mathcal{D}$ représente une fonction affine $f(x) = mx + p$ alors elle n'est pas verticale.

Définition 1 *On appelle, comme pour les fonctions affines, m le et p*

Proposition 2 *$M(x_M; y_M)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$ si, et seulement si,*

Exemple : Soit $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{5}{2}x + 1$. Les points $A(1; \frac{7}{2}), B(3; \frac{17}{2}), C(-2; -6)$ appartiennent-ils à la droite $\mathcal{D}$?

Théorème 1 *Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = mx + p$ et $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.*



Exemple 1 : Soit $A(3; 5), B(1; 2)$. On admet que (AB) a une équation de la forme $y = mx + p$. Déterminer les coefficients m et p sans tracer la droite.

Mais les courbes représentatives des fonctions affines ne sont pas les seules droites du plan.

1.2 Le cas des droites verticales

Remarque : La courbe représentative d'une fonction affine ne peut pas être une
En effet, .

Théorème 2 *Les droites parallèles à l'axe des ordonnées (droites verticales) ont une équation de la forme $x = c$ où c est une constante réelle.*

Remarque : Il s'agit de tous les points du plan ayant le nombre c comme .
Exemple : Quelle est l'équation de la droite verticale passant par le point $A(3; -5)$?

Nous avons vu qu'il existe au moins deux cas possibles pour les droites du plan : elles peuvent être verticales, représenter une fonction affine. D'autres cas sont ils envisageables ?

1.3 Il n'y a pas d'autre cas possible

Théorème 3 *Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Alors elle admet soit une équation $y = mx + p$ (c'est la représentation d'une fonction affine), soit une équation de la forme $x = c$ (cas d'une droite verticale).*

Démonstration : Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts de $\mathcal{D}$. Un point $M(x;y)$ appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs .

On calcule les coordonnées $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$.

La condition de colinéarité se réécrit : .

Deux cas sont alors possibles :

1. $x_B = x_A$ et donc $x_B - x_A = 0$ (et dans ce cas $y_B \neq y_A$ car .
   donc la condition de colinéarité nous donne $(y_B - y_A)(x - x_A) = 0$ soit encore $x - x_A = 0$ soit encore
   $$x = x_A.$$
2. $x_B \neq x_A$ donc $x_B - x_A \neq 0$ et donc la condition de colinéarité se réécrit :
   $$\frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}(x - x_A) = y - y_A$$
   soit en développant et en ajoutant y_A de chaque côté de l'égalité :
   $$y = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}x - \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}x_A + y_A.$$

On a donc bien démontré que la droite a soit une équation de la forme $x = c$ ou $y = mx + p$. On retrouve au passage la formule du Théorème 1 concernant m.

2 Vecteur directeur d'une droite du plan

Définition 2 *Soit $\mathcal{D}$ une droite, A, B deux points distincts de $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ s'appelle un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.*

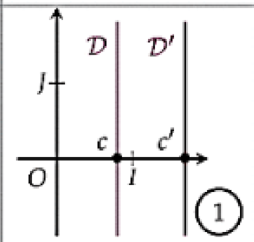
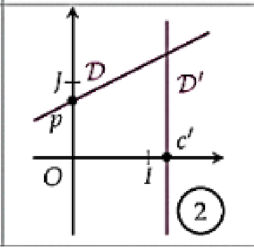
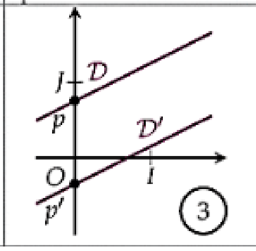
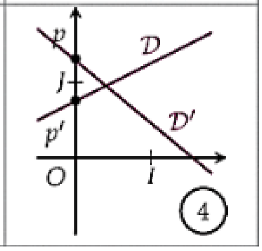
Remarque : Il existe vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$.

Exemple : Soit la droite passant par les points $A(3;2)$, $B(4;-1)$. Alors un vecteur directeur est donné par : .

3 Position relatives de deux droites

Ici on va s'intéresser aux positions relatives des droites. On sait depuis longtemps que deux droites distinctes du plan sont soit :

3.1 les différents cas possibles

Équation de $\mathcal{D}$	$x = c$	$y = mx + p$		
Équation de $\mathcal{D}'$	$x = c'$	$x = c'$	$y = m'x + p'$	
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	$m = m'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles	$m \neq m'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes
Représentation				

Exemple d'application :
Dire si les paires de droites suivantes sont sécantes ou parallèles :

1. d : $y = 2x + 2$, d' : $y = 3x + 1$,
2. d : $y = 2x + 2$, d' : $y = 2x + 1$,
3. d : $y = -x + 2$, d' : $y = x + 1$,
4. d : $x = 3$, d' : $y = 3x + 1$,
5. d : $x = 3$, d' : $x = 1$.

3.2 Point d'intersection de deux droites sécantes

Proposition 3 *Soit d et d' deux droites distinctes et sécantes. Leur point d'intersection $A(x; y)$ est tel que x et y vérifient les équations des deux droites.*

Exemple 1 : Soit d d'équation $y = 3x + 4$, d' d'équation $x = \frac{3}{2}$. On veut calculer les coordonnées de leur point d'intersection :

Exemple 2 : Soit d d'équation $y = -3x + 4$, d' d'équation $y = \frac{1}{3}x - 1$. On veut calculer les coordonnées de leur point d'intersection :